Teorema Pohon Matriks Untuk Menentukan Banyaknya Pohon Rentangan Graf Bipartisi Komplit ($K_{m,n}$)

Novia Dwi Rahmawati
Universitas Hasyim Asy'ari Jombang
noviadwi_rahmawati87@yahoo.co.id

Abstract

This research aims to observes panning tree number of complete bipartite graph ($K_{m,n}$) by matrix-tree theorem.This research was using library research method which the step are:(1)Drawing complete bipartite graph ($K_{m,n}$) where m= 1,2,3,4,and; (2)Determinin adjacency matrix and degree matrix of complete bipartite graph ($K_{m,n}$); (3)Observing the different between degree matrix and adjacency matrix (laplacian matrix) from complete bipartite graph ($K_{m,n}$); (4)Observing cofactor value of laplacian matrix from complete bipartite graph ($K_{m,n}$); (5)Observing spanning tree number pattern from complete bipartite graph ($K_{m,n}$); (6)Forming the formula within theorem; (7)Proving the theorem. The results of this research are as follows that the general form spanning tree number incomplete bipartite graph($K_{m,n}$) with m=1,2,3,4, n ≥1 and m, n ∈ N where is:

$$\tau(K_{m,n}) = m^{n-1}.n^{m-1}$$

***Keywords**: complete bipartite graph, the matrix-tree theorem, cofactor, spanning tree*

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan bentuk umum banyaknya pohon rentangan pada graf bipartisi komplit ($K_{m,n}$) dengan menggunakan teorema pohon matriks. Penelitian ini adalah penelitian pustaka (library research) dengan langkah-langkah penelitian sebagai berikut: (1) Menggambar graf bipartisi komplit ($K_{m,n}$) dengan m = 1, 2, 3, 4, n ≥1 dan m, n ∈ N; (2) Menentukan matriks adjacency($K_{m,n}$) dan matriks derajat dari graf bipartisi komplit; (3) Mencari nilai selisih dari matrik derajat dan matriks adjacency (matriks laplacian) dari graf bipartisi komplit; (4) Mencari nilai kofaktor dari matriks laplacian dari graf bipartisi komplit; (5) Melihat pola banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit; (6) Merumuskan pola ke dalam teorema; (7) Membuktikan teorema. Penelitian ini menunjukkan bahwa bentuk umum banyaknya pohon rentangan pada graf bipartisi komplit ($K_{m,n}$) dengan m = 1, 2, 3, 4, n≥1 dan m, n ∈ N adalah $\tau(K_{m,n}) = m^{n-1}.n^{m-1}$

***Kata Kunci:** graf bipartisi komplit, teorema pohon matriks, kofaktor, pohon rentangan*

PENDAHULUAN

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi.[1]

Allah berfirman dalam Al Qur‟an surat Al Qamar / 54 ayat 49:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ

"Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran"(Q.S. Al-Qamar / 54: 49).

Dari segi bahasa kata tersebut dapat berarti *kadar tertentu* yang tidak bertambah atau berkurang, atau berarti *kuasa*. Tetapi karena ayat tersebut berbicara tentang segala sesuatu yang berada dalam kuasa Allah, maka adalah lebih tepat memahaminya dalam arti *ketentuan* dan *sistem yang telah ditetapkan terhadap segala sesuatu*. Tidak hanya terbatas pada salah satu aspeknya saja. Manusia misalnya, telah ada *kadar yang ditetapkan* Allah baginya.[2]

Dalam ayat lain juga disebutkan:

الَّذِي لَهُ مُلْكُ السَّمَاوَاتِ وَالأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُنْ لَهُ شَرِيكٌ فِي الْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَّرَهُ تَقْدِيرًا

"Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan (Nya),dan dia Telah menciptakan segala sesuatu, dan dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan *serapi-rapinya" (Q.S. Al-Furqaan / 25: 2).*

---

[1] Abdusysyakir, *Ketika Kyai Mengajar Matematika*, (Malang: UIN Malang Press, 2007), hlm. 79.

[2] Shihab, M. Quraish, *Tafsir Al-Misbah Volume 13 Pesan, Kesan & Keserasian Al Qur'an*, (Ciputat: Lentera Hati, 2003), hlm. 482.

Ayat di atas menjelaskan bahwa segala sesuatu yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitungan-hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya. Ahli matematika atau fisika tidak membuat suatu rumus sedikitpun. Mereka hanya menemukan rumus atau persamaan, sehingga rumus-rumus yang ada sekarang bukan diciptakan manusia sendiri, tetapi sudah disediakan. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika.[3]

Dewasa ini semakin banyak muncul penggunaan model matematika maupun penalaran matematika sebagai alat bantu dalam menyelesaikan permasalahan yang dihadapi dalam berbagai disiplin ilmu. Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang penting dan banyak manfaatnya karena teori-teorinya dapat diterapkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Dengan mengkaji dan menganalisa model atau rumusan teori graf dapat diperlihatkan peranan dan kegunaannya dalam memecahkan permasalahan. Permasalahan yang dirumuskan dengan teori graf dibuat sederhana, yaitu diambil aspek-aspek yang diperlukan dan dibuang aspek-aspek lainnya.[4]

Salah satu materi dalam teori graf adalah pohon (*tree*). Pohon (*tree*) didefinisikan sebagai graf tak-berarah terhubung yang tidak memuat sirkuit. Menurut definisi tersebut, ada dua sifat penting pada pohon (*tree*) yaitu terhubung dan tidak memuat sirkuit.[5]

Misalkan G graf dan H subgraf dari G.H disebut subgraf rentangan (*spanning subgraph*) dari graf G jika order H sama dengan order G, atau dengan kata lain jika $V(H)=V(G)$. Subgraf rentangan H dari graf G dapat dengan mudah diperoleh dengan cara menghapus satu atau lebih dari sisi di G. Dengan demikian, jika F adalah himpunan bagian dari $E(G)$, maka graf $G–F$ pasti merupakan subgraf rentangan dari G. [6]

Berkaitan dengan subgraf rentangan, maka permasalahan yang menarik untuk dikaji adalah menentukan banyaknya subgraf rentangan yang berbentuk pohon dari suatu graf, yang dikenal dengan sebutan banyaknya pohon rentangan (*spanning tree number)*.

---

[3]Abdusysyakir, *Ketika Kyai Mengajar Matematika*, (Malang: UIN Malang Press, 2007), hlm. 80.

[4] Purwanto, *Matematika Diskrit*, (Malang: IKIP Malang, 1998), hlm.1.

[5] Chartrand, Gary dan Lesniak. Graphs and Digraphs, (California: Greg Hubit Bookwords, 1986), p. 67.

[6] Op.cit.p.8.

Misalkan G graf dengan order p ($p \geq 1$) dan ukuran q serta himpunan titik $V(G)=v_1, v_2, \ldots, v_p$. *Matriks keterhubungan titik* (atau *matriks keterhubungan*) dari graf G, dinotasikan dengan $A(G)$, adalah matriks (pxp) dengan unsur pada baris ke-i dan kolom ke-j bernilai 1 jika titik v_i terhubung langsung dengan titik v_j serta bernilai 0 jika titik v_i tidak terhubung langsung dengan titik v_j. Dengan kata lain, matriks adjacency dapat ditulis $A(G) = [_{ij}], 1 \leq i, j \leq p$, dengan:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, jika\ v_i v_j \in E(G) \\ 0, jika\ v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$

Matriks keterhubungan suatu graf G adalah matriks simetri dengan unsur 0 dan 1 dan memuat nilai 0 pada diagonal utamanya.[7]

Matriks derajat dari matriks G, dinotasikan dengan $D(G)$, adalah matriks diagonal yang elemen baris ke-i dan kolom ke-i adalah derajat dari $v_i, i= 1, 2, 3, \ldots, p$ Jika $D(G)=[d_{ij}], 1 \leq i, j \leq p$,maka $d_{ii}=\deg v$ dan $d_{ij}=0$ untuk $i \neq j$. Matriks$T(G)=D(G)-A(G)$, disebut matriks *Laplacian* dan sebarang kofaktor dari $T(G)$ sama banyaknya pohon rentangan (*spanning tree number*) pada G, yaitu $\tau(G)$.[8]

Untuk menentukan pohon rentangan dari suatu graf terhubung, biasanya dilakukan dengan cara menghapus sisi-sisi sehingga graf tersebut tidak lagi mengandung sikel. Akan tetapi, cara ini memerlukan waktu yang lama, sehingga diperlukan suatu cara atau rumusan baku untuk menentukan banyaknya pohon rentangan dari suatu graf, yaitu dengan cara direpresentasikan dalam bentuk matriks. Bentuk graf yang dinyatakan dalam suatu matriks kemudian diselesaikan dengan metode-metode yang berlaku pada matriks.

[7] Op.cit.p.4.

[8] Agnarsson, G. dan Greenlaw, R, Graph Teory : Modeling, Applications, and Alghoritms, (New Jersey: Pearson Prentice Hall, 2007), p.112.

Berdasarkan pertanyaan penelitian, maka tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan banyaknya pohon rentangan pada graf bipartisi komplit $(K_{m,n})$ dengan teorema pohon matriks.

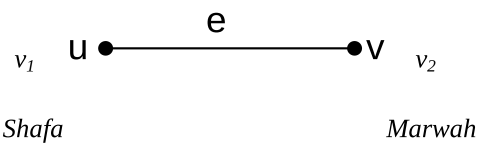
Penelitian ini adalah penelitian pustaka (*library research*) dengan langkah-langkah penelitian sebagai berikut: 1)Menggambar graf bipartisi komplit ($K_{m,n}$) dengan m = 1, 2, 3, 4, $n \geq 1$ dan $m, n \in N$**;** 2)Menentukan matriks *adjacency* ($K_{m,n}$) dan matriks derajat dari graf bipartisi komplit; 3)Mencari nilai selisih dari matrik derajat dan matriks *adjacency* (matriks *laplacian*) dari graf bipartisi komplit; 4)Mencari nilai kofaktor dari matrik laplacian dari graf bipartisi komplit; 5)Melihat pola banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit; 6) Merumuskan pola ke dalam teorema; 7) Membuktikan teorema.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Definisi 1

Sisi $e=(u,v)$ *dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika* $e=(u,v)$ *adalah sisi dari graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung (adjacend), u dan e serta v dan e disebut terkait langsung (incident). Untuk selanjutnya, sisi* $e=(u,v)$ *akan ditulis* $e=uv$.[9]

Dari definisi di atas, maka dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 1 Graf *G* dengan Sisi $e=(u,v)$ Menghubungkan Titik *u* dan *v*

Karena $e=(u,v)$ sisi di *G*, maka *u* dan *v* disebut terhubung langsung (*adjacent*). Sedangkan *e* dan *u* serta *e* dan *v* disebut terkait langsung (*incident*).

Dalam Islam, definisi *adjacent* dan *incident* dapat direpresentasikan untuk menggambarkan peristiwa Sa’i dalam ibadah

[9] Chartrand, Gary dan Lesniak. Graphs and Digraphs, (California: Greg Hubit Bookwords, 1986), p. 4.

haji. Dalam Al-Quran dijelaskan dalam surat Al-Baqarah / 2 ayat 158 yang berbunyi:

إِنَّ الصَّفَا وَالْمَرْوَةَ مِنْ شَعَائِرِ اللَّهِ فَمَنْ حَجَّ الْبَيْتَ أَوِ اعْتَمَرَ فَلا جُنَاحَ عَلَيْهِ
أَنْ يَطَّوَّفَ بِهِمَا وَمَنْ تَطَوَّعَ خَيْرًا فَإِنَّ اللَّهَ شَاكِرٌ عَلِيمٌ

Sa'i merupakan salah satu rukun haji dan umrah, dilakukan setelah selesai melakukan thawaf. Sa'i adalah lari kecil-kecil yang dilakukan antara bukit Shafa dan Marwa. Terkait dengan kejadian diatas, maka kejadian tersebut dapat direpresentasikan pada graf yang terdiri dari 2 titik dan 1 sisi.

Gambar 2 Representasi Graf Terhadap Ibadah Sa'i

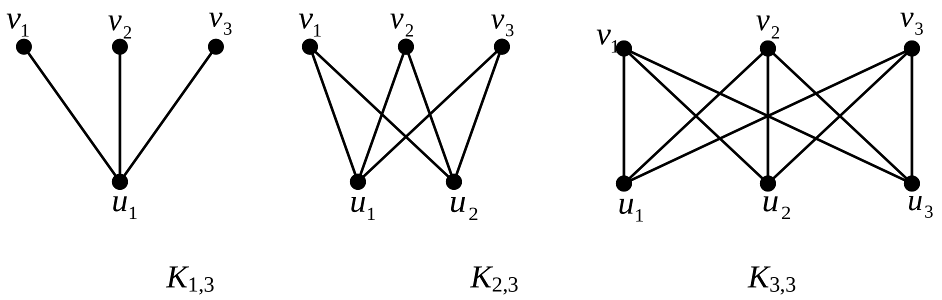
Dari Gambar 1 diatas merupakan salah satu contoh dari bentuk graf komplit K_2 yang terdiri dari dua titik dan satu sisi. Titik-titiknya adalah bukit shafa dan marwa sedangkan sisinya adalah perjalanan sa'i itu sendiri. Jadi bukit shafa (v_1) dengan perjalan sa'i (sisi) adalah *incident* sedangkan bukit Shafa (v_1) bukit Marwa (v_2) adalah *adjacent*.

Definisi 2

Graf bipartisi komplit (complete bipartite graph) adalah Graf bipartisi dengan himpunan partisi X dan Y sehingga masing-masing titik di X dihubungkan dengan masing-masing titik di Y oleh tepat satu sisi. Jika $|X| = m$ *dan* $|Y| = n$*, maka graf bipartisi tersebut dinyatakan dengan* $K_{m,n}$*.*[10]

[10] Purwanto, *Matematika Diskrit*, (Malang: IKIP Malang, 1998), hlm.22.

Contoh:



Gambar 3 Graf Bipartisi Komplit

Pada Gambar 3 akan dijelaskan sebagai berikut:

$K_{1,3}$ adalah graf bipartisi komplit dengan

$X = \{u_1\}$, $|X| = 1$

$Y = \{v_1, v_2, v_3\}$, $|Y| = 3$

$K_{2,3}$ adalah graf bipartisi komplit dengan

$X = \{u_1, u_2\}$, $|X| = 1$

$Y = \{v_1, v_2, v_3\}$, $|Y| = 3$

$K_{3,3}$ adalah graf bipartisi komplit dengan

$X = \{u_1, u_2, u_3\}$, $|X| = 1$

$Y = \{v_1, v_2, v_3\}$, $|Y| = 3$

Dalam Islam, definisi graf bipartisi komplit dapat dipresentasikan untuk menggambarkan rukun Islam yang menjadi dasar bagi umat Islam.

Rukun Islam menjadi landasan operasional dari Rukun Iman. Belum cukup dikatakan beriman hanya dengan mengerjakan Rukun Islam tanpa ada upaya untuk menegakkannya. Rukun Islam merupakan *training*/pelatihan bagi orang mukmin menuju mardhotillah/keridhoan Allah SWT.

Syahadat adalah *agreement* (perjanjian) antara seorang muslim dengan Allah SWT [7:172]. Seseorang yang telah menyatakan Laa ilaaha ilallaah berarti telah siap untuk *fight* (bertarung) melawan segala bentuk ilah di luar Allah SWT di di dalam kehidupannya [29:2].

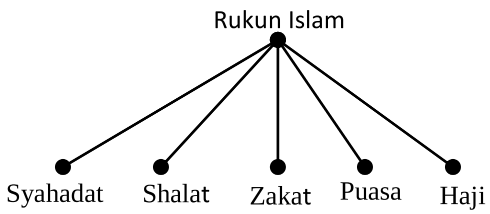
Shalat adalah *training* sebagai latihan agar setiap muslim di dalam kehidupannya adalah dalam rangka sujud (beribadah) kepada Allah SWT [6:162].

Zakat adalah *training*, yaitu sebagai latihan agar menginfakkan hartanya, karena setiap harta seorang muslim adalah milik Allah SWT [57:7, 59:7]. "Engkau ambil zakat itu dari orang-orang kaya mereka dan engkau kembalikan kepada orang-orang fakir mereka" (HR Mutafaqun 'alahi).

Shaum adalah *training*, yaitu sebagai latihan pengendalian kebiasaan pada jasmani, yaitu makan dan minum dan ruhani, yaitu hawa nafsu [2:185].

Haji adalah *training*, yaitu sebagai latihan dalam pengorbanan jiwa dan harta di jalan Allah SWT, mengamalkan persatuan dan persamaan derajat dengan sesama manusia [22:27-28].

Rukun Islam dapat direpresentasikan dalam suatu graf yang terdiri dari 6 titik yang dipartisi menjadi 2 bagian, dan masing-masing titik pada suatu partisi terhubung langsung dengan semua titik pada partisi yang lain.



Gambar 4 Representasi Graf Terhadap Rukun Islam

Dari Gambar 4 di atas merupakan salah satu contoh dari bentuk graf bipartisi komplit $K_{1,5}$ yang terdiri dari dari 6 titik yang dipartisi menjadi 2 bagian, dan masing-masing titik pada suatu partisi terhubung langsung dengan semua titik pada partisi yang lain. Titik yang terletak pada partisi pertama adalah Rukun Islam, sedangkan titik-titik yang terletak pada partisi kedua adalah Syahadat, Shalat, Zakat, Puasa dan Haji.

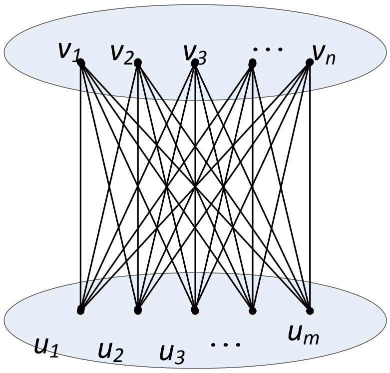
Teorema:

Misal $K_{m,n}$ graf bipartisi komplit dengan $m, n \in N$, maka banyaknya pohon rentangan dari graf bipartisi komplit$\left(K_{m,n}\right)$ adalah:

$$\tau\left(K_{m,n}\right) = m^{n-1} \, . \, n^{m-1}$$

Bukti:

Graf bipartisi komplit $(K_{m,n})$ dengan $m, n \in N$ dapat digambar sebagai berikut:



Gambar 5 Graf Bipartisi Komplit$\left(K_{m,n}\right)$

Misal $\left(K_{m,n}\right)$adalah graf bipartisi komplit dengan $m, n \in N$, maka matriks adjacency dari graf bipartisi komplit $\left(K_{m,n}\right)$.

u_1 u_2 u_3 ... u_m v_1 v_2 v_3 ... v_n

$$A\left(K_{m,n}\right)=\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_m \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{array}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks derajat dari graf bipartisi komplit $\left(K_{m,n}\right)$

$$D\left(K_{m,n}\right)=\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_m \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{array}\begin{bmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & n & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & m & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & m \end{bmatrix}$$

Setelah mendapatkan bentuk matriks adjacency dan matriks derajat maka akan dicari matriks laplacian dan nilai kofaktor $\left(C_{11}\right)$ matriks laplacian dari matriks-matriks tersebut, yaitu dengan menggunakan persamaan:

$$T(G) \;= D(G) - A(G)$$

$$T(G)=\begin{bmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & n & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & n & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & n & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & m & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & m \end{bmatrix}$$

Jadi didapatkan matriks laplacian bagi $\left(\sim_{m,n} \right)$ adalah

$$\begin{bmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & n & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & n & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & m & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & m \end{bmatrix}$$

Dengan banyaknya kolom adalah $m+n$ dan banyaknya baris $m+n$ atau matriks dengan orde $m+n$

Setelah mendapatkan matriks laplacian maka selanjutnya akan dicari nilai kofaktor (C_{11}) dari matriks laplacian, yaitu:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \det (M_{11})$$

$$C_{11} \text{ dari} \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & n & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & n & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & m & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & m \end{bmatrix}$$

$$= (-1)^2 \det \begin{bmatrix} n & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & n & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & m & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & m \end{bmatrix}$$

Dengan banyaknya kolom adalah $m+n-1$ dan banyaknya baris $m+n-1$ atau matriks dengan orde $m+n-1$

Melalui operasi baris elementer, M_{11} direduksi menjadi matriks segitiga atas diperoleh,

$$\begin{bmatrix} n & 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & n & \dots & 0 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{mn-(m-1)}{n} & -\frac{(m-1)}{n} & -\frac{(m-1)}{n} & \dots & -\frac{(m-1)}{n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{m^2n-2(m-1)m}{mn-(m-1)} & -\frac{(m-1)m}{mn-(m-1)} & \dots & -\frac{(m-1)m}{mn-(m-1)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \frac{m^3n-3(m-1)m^2}{m^2n-2(m-1)m} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -\frac{(m-1)m^n}{m^nn-n(m-(n-2)m^n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{m^nn-n(m-1)m^n}{m^nn-n(m-(n-1))m^n} \end{bmatrix}$$

Dimana det M_{11} tidak lain adalah hasil perkalian diagonal matriks segitiga atas tersebut. Jadi,

$$\text{Det } M_{11} = n\,.\,n\,.\,\dots\,.\,n\,.\frac{mn-(m-1)}{n}\cdot\frac{m^2n-2(m-1)m}{mn-(m-1)}\cdot\frac{m^3n-3(m-1)m^2}{m^2n-2(m-1)m}\,.$$

$$\dots\,.\,\frac{m^nn-n(m-1)m^n}{m^nn-n(m-(n-1))m^n}$$

$$= \quad n^{m-1}\,.\,m^{n-1}$$

Jadi terbukti bahwa banyaknya pohon rentangan ($K_{m,n}$) = n^{m-1}. m^{n-1}

PENUTUP

Simpulan

Segala sesuatu yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitungan-hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya. Bentuk umum banyaknya pohon rentangan pada graf bipartisi komplit ($K_{m,n}$) dengan $n \geq 1$ dan $m,n \in N$ adalah:

$$\tau\left(K_{m,n}\right) = \; m^{n-1}\,.\; n^{\,m-1}$$

Dalam Islam, definisi *adjacent* dan *incident* dapat direpresentasikan untuk menggambarkan peristiwa Sa'i dalam ibadah haji.

DAFTAR PUSTAKA

Abdusysyakir. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang. UIN Malang Press, 2007.

Agnarsson, G. dan Greenlaw, R. *Graph Teory : Modeling, Applications, and Alghoritms*. New Jersey:Pearson Prentice Hall, 2007.

Chartrand, Gary dan Lesniak. *Graphs and Digraphs*. California: Greg Hubit Bookwords, 1986.

Purwanto. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang, 1998.

Shihab, M. Quraish. *Tafsir Al-Misbah Volume 13 Pesan, Kesan & KeserasianAl Qur'an*. Ciputat: Lentera Hati, 2003.